1. **Пояснительная записка**

Задача - это почти всегда поиск, раскрытие каких-то свойств и отношений, а средство ее решения - это интуиция, эрудиция, владение методами математики. Эти же качества человеческого ума воспитываются, укрепляются, обогащаются у каждого, кто регулярно отдает часть своего досуга умственной гимнастике, лучшим видом которой является решение математических головоломок, ребусов, задач с интригующим содержанием. Олимпиадные задачи, как правило, являются нестандартными, то есть требующие использование всех знаний в нестандартных ситуациях.

 **Цель**: исследование и изучение основных типов олимпиадных задач и их классификацию, ознакомление с методами их решения и развитие познавательного интереса обучающихся к такому виду задач.

 **Задачи:**

- изучить и понять типы олимпиадных задач;

- рассмотреть идеи и методы решения олимпиадных задач.

**Объектом** являются различные олимпиадные задачи: логические задачи, задачи на переливание и взвешивание, раскраска, игры, графы, задачи на делимость т.д. А предмет исследования - способы решения таких задач.

**Актуальность.** Работа с оригинальной, необычной, интересной задачей - важнейшая особенность в деятельности учителя математики. В последние годы стали разнообразнее и интереснее формы этой работы. Олимпиад все больше и больше. Их не счесть. Олимпиады классные, школьные, районные, областные, республиканские.

Можно с полным основанием заявить, что систематическая и регулярная работа с олимпиадными задачками – важнейший залог успешного творческого неформального овладения математикой. Оригинальные находки, нестандартные подходы, изобретательные выходы из трудных положений являются мощнейшим катализатором интеллектуального развития растущего человека. Радость от достижений в интеллектуальной области - одна из самых величайших радостей человеческого духа. Задачи, представленные в пособии, дают обильный материал для обучающихся с 5 по 11 классы, они позволят познакомиться с наиболее важными идеями и методами, заложенными в олимпиадных задачах. Это позволит изучать способы решения олимпиадных задач в течение всего курса школьной математики, тем самым показывая безграничные возможности ученика.

**Гипотеза:** Изучение методов решения олимпиадных задач повысит интерес обучающихся к принятию участия в них; способствует развитию компетентной личности, владеющей настойчивостью, инициативой, самостоятельностью.

1. **Классификация задач**

 Олимпиадные задачи классифицируются следующим образом (данная классификация является неполной):

* 1. **Логические**

Логические задачи стоят несколько особняком среди математических задач: в них, как правило, отсутствуют вычисления. Однако решение логических задач является обязательным компонентом подготовки к решению олимпиадных задач. Главной задачей при рассмотрении этого раздела является формирование культуры мышления. Очень важно, чтобы ученики не путали причину со следствием, тщательно проводили перебор вариантов, правильно строили цепочку рассуждений. Как правило, у логической задачи имеется единственный ответ.

К логическим задачам модно отнести задачи , которые решаются следующими способами:

* переливание
* взвешивание
* принцип Дирихле
* графы
* задачи – шутки

«Принцип Дирихле»

Данный принцип был сформулирован почетным немецким математиком Иоганном Дирихле еще в 1834 году. Сегодня его применяют в комбинаторике, а также в математической физике. В переводе с оригинального немецкого он звучит как «принцип ящиков».

Этот принцип достаточно прост и очевиден, иногда им пользуются из соображений логики, даже не зная формулировки. Но, зная этот принцип, легче догадаться в каких случаях его применять. Проще всего принцип Дирихле выражается в такой шуточной форме: «***Если в n клетках больше чем n+1 зайцев, то хотя бы в одной клетке сидят не меньше двух зайцев***». Заметим, что в роли зайцев могут выступать различные предметы и математические объекты – числа, отрезки, места в таблице и т.д. несмотря на совершенную очевидность этого принципа, его применение является весьма эффективным методом решения задач, дающим во многих случаях наиболее простое и изящное решение. Однако во всех этих задачах часто нелегко догадаться, что считать «зайцем», что – «клеткой», и как использовать наличие двух «зайцев», попавших в одну «клетку». С помощью принципа Дирихле обычно доказывается существование некоторого объекта, не указывая, вообще говоря, алгоритм его нахождения или построения. Это дает так называемое не конструированное доказательство – мы не можем сказать, в какой именно «клетке» сидят два зайца, а знаем только, что такая «клетка» есть.

Задачи.

1. В школе 400 учеников. Докажите, хотя бы двое из них родились в один день года.

*Решение:* всего в году 366 дней. Пусть дни будут «клетками», а ученики – «кроликами». Тогда в некоторой «клетке» сидят не меньше $\frac{400}{366}$ «кроликов», т.е. больше одного, отсюда следует, что не меньше двух.

1. Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел +1,-1,0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

*Решение:* Допустим, что квадрат составлен, тогда суммы чисел могут меняться в пределах от -6 до +6. Всего 13 значений. Строк в квадрате 6, столбцов 6, диагоналей 2. Получаем 14 различных сумм. Противоречие, значит составить такой квадрат невозможно.

1. На собеседовании пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2,3,4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

*Решение:* рассмотрим множество наборов из трех оценок за соответствующие контрольные. Количество таких наборов равно 43 или 64 (4 возможности за каждую из трех контрольных). Поскольку число учащихся больше 64, по принципу Дирихле каким-то двум учащимся соответствует один набор оценок.

1. У человека на голове не более 3 млн волос, в городе более 8 млн жителей. Докажите, что найдутся 20 человек с одинаковым количеством волос.

*Решение:* всего на голове у каждого человека, по условию, может быть от 0 до 400000 волос – имеем всего 400001 возможность. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда лысых москвичей найдется не более 19, имеющих 1 волос – тоже не более 19, имеющих 400000 волос – не более 19 и т.д. но тогда всего человек не более 19·400001=7600019, что меньше 8 миллионов – противоречие.

1. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1×1 метр, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки считать точечными).

*Решение:* разрежем ковер четырьмя вертикальными и четырьмя горизонтальными размерами на 16 одинаковых ковриков размером 1×1 метр. Поскольку 16>15, то один из ковриков будет без дыр. Здесь «кролики» - это дыры, а «клетки» - это коврики.

1. Родители 25 учеников 5 класса купили своим детям сотовые телефоны 8 разных моделей. Найдутся ли четыре ученика, имеющие телефоны одной модели.

*Решение:* пусть модели сотовых телефон это – «клетки», то есть 8 «клеток», тогда в каждую «клетку» посадят $\frac{25}{8}$, то есть более 3. Ответ «Да».

1. В кондитерский отдел завезли 45 коробок с конфетами пяти разных наименований, причем в каждой коробке лежат конфеты только какого-то одного наименования. Найдутся ли 9 коробок с конфетами одного наименования.

*Решение:* пусть «клетками» будут наименования коробок, тогда коробки – «кролики», значит в каждой клетке будет по $\frac{45}{5}$ «кроликов», то есть равно 9. Ответ «Да».

1. Учитель математики объявил результаты самостоятельной работы, проведенной в 6 классе. Наибольшее количество ошибок допустил Олег – у него ровно 13 ошибок. Можно ли среди 28 учащихся класса, допустивших ошибки, найти три ученика с одинаковым количеством ошибок?

*Решение:* пусть количество ошибок – «клетки», тогда таких клеток будет ровно 13, так как наибольшее количество ошибок 13 а наименьшее 1. Значит рассаживаем по «клеткам» 28 «зайцев», тогда получится $\frac{28}{13}$ – 26 учащихся по 2 ошибки и 2 учащихся по 3 ошибки. Ответ «Да».

1. В классе 35 учеников. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы?

Решение: в алфавите всего 33 буквы, из них две буквы «Ъ» и «Ь», не могут являться начальными буквами, следовательно остается 31 буква. Пусть «клетками» будут начальные буквы, тогда «зайцами» - количество учеников. Значит на каждую букву алфавита придет по $\frac{35}{31}$, то есть в 33 «клетках», по одному «кролику» и в четырех «клетках» - по 2 «кролика». Ответ «Да».

1. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст – 332 года. Доказать, что из них можно выбрать 3 человека, сумма возрастов которых не меньше 142 года.

*Решение:* средний возраст трех самых старших не меньше среднего возраста по бригаде, который равен $\frac{332}{7}$. Поэтому сумма из возрастов по меньшей мере $\frac{3×332}{7}>142$ года.

* 1. **Инвариант**

Инвариант значит "неизменный".

**Инвариантом** некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании. Главная трудность при решении задач на инварианты состоит в его поиске. Нахождение инварианта является самым важным шагом на пути к решению задачи.

В качестве инварианта чаще всего рассматриваются следующие способы решения олимпиадных задач:

* раскраска
* игры

«Вспомогательная раскраска»

Говорят, что фигура покрашена в несколько цветов, если каждой точке фигуры приписан определённый цвет. Бывают задачи, где раскраска уже дана, например, для шахматной доски, бывают задачи, где раскраску с данными свойствами нужно придумать, и бывают задачи, где раскраска используется как идея решения.

Суть данного метода состоит в следующем. Раскрасив некоторые ключевые элементы, которые фигурируют в задаче в несколько цветов, исследовать, что будет происходить, если выполнять условия задачи. Цвет позволяет значительно упростить понимание процесса, фигурируемого в условии, и зачастую приводит к решению. Этот метод позволяет эффективно решать ряд задач, в частности, игровые и шахматные задачи.

Задачи

1. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на «домино» из двух клеток

*Решение*. Каждая фигура «домино» содержит одну белую и одну чёрную клетку. Но в нашей фигуре 32 чёрных и 30 белых клеток (или наоборот).

2. Можно ли все клетки доски 9 × 9 обойти конем по одному разу и вернуться в исходную клетку?

*Решение.* Каждым ходом конь меняет цвет клетки, поэтому, если существует обход, то число чёрных клеток равно числу белых, что неверно.

3. Дан куб 6 × 6 × 6. Найдите максимально возможное число параллелепипедов 4× 1 × 1 (со сторонами параллельными сторонам куба), которые можно поместить в этот куб без пересечений.

*Идея решения*. Легко поместить 52 параллелепипеда внутрь куба. Докажем, что нельзя больше. Разобьем куб на 27 кубиков 2× 2 × 2. Раскрасим их в шахматном порядке. При этом образуется 104 клетки одного цвета (белого) и 112 другого (чёрного). Осталось заметить, что каждый параллелепипед содержит две чёрных и две белых клетки.

Ответ: 52.

4. Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

*Решение*. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 1. По принципу Дирихле по крайней мере две из его трёх вершин должны быть покрашены в один цвет.

1. В каждой клетке доски 5×5 клеток сидел жук. Затем каждый жук переполз на соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что осталась хотя бы одна пустая клетка

Решение:  раскрасим доску в 2 цвета. Черных клеток-13, а белых 12. При переползании с черных клеток жуки переползали на  белые и наоборот. Так как  белых клеток 12, а черных на одну больше и все жуки с белых переползают на черные, то 1 черная клетка останется. Ответ: останется 1 черная клетка.

«Математические игры»

Дети любят играть! Поэтому, особенно у школьников, большой интерес вызывают задачи-игры. С их помощью можно внести в изучение элемент развлечения: устроить турнир, сеанс одновременной игры, наконец, просто поиграть.

При изложении решения игровых задач школьники испытывают большие трудности. Ведь необходимо, во-первых, грамотно сформулировать стратегию, а во-вторых, доказать, что она действительно ведет к выигрышу. Поэтому задачи-игры очень полезны для развития разговорной математической культуры и четкого понимания того, что означает «решить задачу».

Под понятием математической игры мы понимаем игру двух соперников, обладающих следующим свойством. В каждый момент игры состояние характеризуется позицией, которая может изменяться только в зависимости от ходов игроков. Для каждого из игроков некоторые позиции объявляются выигрышными. Добиться выигрышной для себя позиции и есть цель каждого. Иногда игры допускают ничью. Это означает, что ни один из игроков не может добиться выигрышной для него позиции, или некоторые позиции объявлены ничейными.

Например, шахматы, шашки, крестики-нолики являются математическими играми. А игры в кости, домино, большинство карточных игр математическими играми не являются, так как состояние игры зависит не только от ходов соперника, но и от расклада и результата бросания кости.

В математических играх существуют понятия выигрышной стратегии, т.е. набора правил (можно сказать, интуиции и алгоритма), следуя которым, один из игроков обязательно выиграет (независимо от того как играет его соперник), и ничейной стратегии, следуя которой один из игроков обязательно добьется либо выигрыша, либо ничьей. Например, крестики-нолики являются ничейной игрой. К какому из перечисленных случаев относится шахматы и шашки неизвестно. Хотя стратегия в этих играх существует, она не найдена поэтому соревнования по этим играм пока представляют интерес.

*Соответствие*. Наличие удачного ответного хода.

*Решение с конца*. Последовательно определяются позиции, выигрышные и проигрышные для начинающего.

*Передача хода*. Если мы можем воспользоваться стратегией противника, то наши дела не хуже, чем у него. Например, выигрыш (или ничья) обеспечивается, когда можно по своему желанию попасть в некоторую позицию либо заставить противника попасть в нее.

Задачи

1.Двое кладут по очереди пятаки на круглый стол. Проигрывает тот, кто не сможет положить очередной пятак. Кто выигрывает?

*Решение.* Выигрывает первый. Он кладёт пятак в центр стола, после чего на любой ход второго у первого всегда есть симметричный ответ.

2. В куче 25 камней. Игроки берут по очереди 2, 4 и 7 камней. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто победит?

*Идея решения*. Случаи 0 и 1 камня проигрышны для начинающего. Поэтому случаи 2, 3, 4, 5, 7, 8 камней для начинающего выигрышны: своим ходом он переводит игру в позицию, проигрышную для противника. Аналогично, 6 и 9 камней проигрышны для начинающего, поскольку из них можно перейти только в позицию, выигрышную для противника. Рассуждая аналогично, легко установить периодичность выигрышных и проигрышных позиций и получить ответ.

3. Докажите, что в игре «крестики-нолики» на бесконечной доске у ноликов отсутствует выигрышная стратегия.

*Решение*. Пусть у ноликов есть выигрышная стратегия. Тогда этой стратегией могут с тем же успехом воспользоваться крестики, игнорируя свой начальный знак. (Когда крестикам приходится ходить на поле, где крестик уже стоит, они ходят куда угодно.)

4. Две компании A и B получили право освещать столицу международной шахматной мысли Нью-Васюки, представляющую собой прямоугольную сетку улиц.

Они по очереди ставят на неосвещённый перекресток прожектор, который освещает весь северо-восточный угол города (от нуля до 90\_). Премию О. Бендера получит та компания, которой на своем ходе нечего будет освещать. Кто выиграет при правильной игре?

*Решение.* Самый северо-восточный квартал города будет освещён в любом случае после первого хода. Допустим, у B есть выигрышная стратегия. Тогда у неё есть выигрышный ответ на ход A, состоящий в освещении только северо-восточного квартала. Но с этого же хода может начать игру A и затем воспользоваться выигрышной стратегией B! Противоречие. Значит, выигрышная стратегия есть у A.

**Выводы:** данная работа позволяет ученику самостоятельно выбирать для изучения различные способы решения, и выбирать именно те задачи, которые более интересны, что в свою очередь развивает у обучающегося интерес к задачам повышенной сложности.

Когда ученик сам самостоятельно работает над проблемой нахождения пути решения задачи у него пропадает страх перед сложностями, которыми обычно обладают олимпиадные задачи, а самая главная цель – это не заставить ученика решать задачи, а развить в нем свое собственное желание.

Преимущество заключается в том, что математика дает безграничные возможности развития интеллекта через огромное количество задач, через огромное количество методов и способов решения этих задач, показывая тем самым, что нет предела совершенству. И научиться решать задачи можно всегда, а учиться решать задачи можно постоянно, приобретая тем самым внутреннюю уверенность в своих силах.

* 1. Обзор литературы

Были изучены различные книги, в которых идет описание методов решения олимпиадных задач, дается их классификация задач.

 С данных книг были выбраны задачи для прорешивания по тем методам, которые здесь рассмотрены. А именно по книге Севрюкова П.Ф. "Подготовка к решению олимпиадных задач по математике", были изучены методы «Принцип Дирихле», «Игры». Из книги Фаркова А.В. "Математические олимпиады в школе 5-11 классы", Дориченко С.А., Ященко И.В., "LVII Московская математическая олимпиада" ,   Васильева Н.Б., Егоров А.А. "Сборник подготовительных задач к Всеросийской олимпиаде юных математиков", Горбачева Н.В. "Сборник олимпиадных задач по математике", были выбраны задачи.