**Конспект урока решения проблемно-развивающих задач по теме «Исследование функций на монотонность и экстремумы»**

Тип урока: урок решения проблемно-развивающих задач

Цели урока:

- закрепить умение учащихся применять производную при исследовании функций на монотонность и экстремумы;

- формировать умение применять исследование функций на монотонность и экстремумы при решении проблемно-развивающих задач: решение уравнений и неравенств, доказательство тождеств, сравнение чисел;

- развивать логическое мышление;

- формировать умение анализировать условие, выбирать соответствующий способ действия, контролировать и оценивать его выполнение;

- воспитывать целеустремленность, способность довести дело до конца даже в ситуациях, которые кажутся безвыходными.

**План урока**

I. Мотивационно-ориентировочная часть

1. Актуализация опорных знаний учащихся через устное решение задач по готовым чертежам (презентация)
2. Постановка целей урока

II. Операционно-познавательная часть

1. Применение производной при доказательстве тождеств. (Фронтальное решение задачи №1 с последующей записью алгоритма доказательства тождеств с помощью производной)
2. Применение производной при решении уравнений. (Решают учащиеся у доски)
3. Применение производной при решении неравенств.
4. Применение производной при сравнении чисел.
5. Двухуровневая самостоятельная работа.

III. Рефлексивно-оценочная часть

1. Подведение итогов урока: определение учащимися, достигнута ли цель урока; выделение самых простых и самых трудных моментов.
2. Устный опрос.
3. Объявление отметок.
4. Задание на дом.

**Ход урока**

***I. Мотивационно-ориентировочная часть***

1. **Актуализация опорных знаний**

Ученики устно отвечают на вопросы, проговаривая теоремы







**2. Постановка целей урока**

Сегодня мы продолжим применять производную для исследования функций. Но если раньше исследование функции – это была цель решения задачи, то сегодня это будет средство при решении самых разнообразных задач.

Учащиеся с помощью учителя формулируют цель урока: научиться применять производную при решении нестандартных задач.

***II. Операционно-познавательная часть***

Итак, сегодня мы увидим, что исследование функций может помочь в таких заданиях:

1. доказательство тождеств;
2. решение уравнений;
3. решение неравенств;
4. сравнение чисел.

1)Задача №1. Докажите тождество $cos^{4}x-\frac{1}{8}cos4x-2cos^{2}x+\frac{1}{2}cos2x=-\frac{5}{8}$

|  |
| --- |
| **Анализ условия задачи** |
| *Деятельность учителя* | *Деятельность ученика* |
| Что значит «доказать тождество»? | Доказать тождество – значит доказать, что равенство выполняется при любых значениях входящих в него переменных. |
| Как мы поступаем в таких случаях? | Упрощаем левую часть равенства и получаем правую. |

Затем следует одна-две попытки упростить левую часть равенства

|  |
| --- |
| Поиск способа решения задачи |
| *Деятельность учителя* | *Деятельность ученика* |
| Попробуем решить эту задачу с помощью производной. |  |
| Где мы используем производную? | При исследовании функций на монотонность и экстремумы |
| Какую функцию можно рассмотреть в этой задаче? | *f*(*x*) = $cos^{4}x-\frac{1}{8}cos4x-2cos^{2}x+\frac{1}{2}cos2x$  |
| Какова область определения функции *f*(*x*) = $cos^{4}x-\frac{1}{8}cos4x-2cos^{2}x+\frac{1}{2}cos2x$? | D(*f*) = R |
| Чему равно ее значение? | Ее значение равно -5/8 при любом значении *х* |
| Как называется такая функция, значение которой неизменно на всей области определения? | Постоянная функция |
| Измените вопрос задачи, используя понятие «постоянная функция» | Докажите, что функция *f*(*x*) = $cos^{4}x-\frac{1}{8}cos4x-2cos^{2}x+\frac{1}{2}cos2x$ – постоянная, и имеет значение -5/8 на всей области определения. |
| Как доказать постоянство функции? | Используем теорему о постоянной функции: Если во всех точках открытого промежутка *Х* выполняется равенство *f‘*(*x*) = 0, то функция *y*=*f*(*x*) постоянна на промежутке *Х*. |

Решение:

$$cos^{4}x-\frac{1}{8}cos4x-2cos^{2}x+\frac{1}{2}cos2x=-\frac{5}{8}$$

1. Рассмотрим функцию *f*(*x*) = $cos^{4}x-\frac{1}{8}cos4x-2cos^{2}x+\frac{1}{2}cos2x$

D(*f*) = R

1. *f’*(*x*) =

 = $4cos^{3}x\left(-sinx\right)-\frac{1}{8}\left(-4sin4x\right)-2\*2cosx\left(-sinx\right)+\frac{1}{2}\left(-2sin2x\right)==-4sinxcos^{3}x+\frac{1}{2}sin4x+4sinxcosx-sin2x=$

$$=-2sin2xcos^{2}x+sin2xcos2x+2sin2x-sin2x==sin2x\left(-2cos^{2}x+cos2x+1\right)==sin2x\left(-2cos^{2}x+cos^{2}x-sin^{2}x+1\right)=sin2x\left(-1+1\right)=0$$

*f’*(*x*) =0 при любом *х*, значит функция *y* = *f*(*x*) – постоянна на R.

1. Найдем значение функции в любой точке, например х = 0

*f*(0) = $cos^{4}0-\frac{1}{8}cos0-2cos^{2}0+\frac{1}{2}cos0=1-\frac{1}{8}-2+\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$

Вывод: равенство$cos^{4}x-\frac{1}{8}cos4x-2cos^{2}x+\frac{1}{2}cos2x=-\frac{5}{8}$ выполняется при любом *х*

|  |
| --- |
| **Исследование задачи** |
| *Деятельность учителя* | *Деятельность ученика* |
| Какой новый способ доказательства тождеств мы узнали? | С помощью производной |
| Какова основная идея доказательства? | Рассмотреть функцию, значение которой должно быть неизменно, и доказать ее постоянство, используя теорему о производной постоянной функции |
| Запишем алгоритм доказательства тождеств с помощью производной | **Алгоритм доказательства тождеств с помощью производной**1) Рассмотреть функцию, значение которой должно быть постоянно;2) доказать постоянство функции: *f’*(*x*) =0 => *f*(*x*) = const;3) найти значение функции в любой точке, сделать вывод. |

2) Задача №2. Решите уравнение $х^{2}-х+2=2\sqrt[4]{2х-1}$

|  |
| --- |
| **Анализ условия задачи и поиск решения** |
| *Деятельность учителя* | *Деятельность ученика* |
| Какого вида уравнение? | Иррациональное |
| С чего начинается решение иррационального уравнения? | С нахождения области допустимых значений:2х – 1 ≥ 0х ≥ 0,5ОДЗ = [0,5; +∞) |
| Какие способы решения иррациональных уравнений мы знаем? | 1)возвести обе части в 4-ую степень;2) заменой переменной;3) графический. |
| Три ученика у доски пытаются решить уравнение известными способами. |
| 1) Начните решение первым способом | При возведении обеих частей уравнения в 4-ую степень появится х8, х7,…, х2, х, а это уравнение 8-ой степени. |
| Сможем ли мы решить уравнение первым способом? | Нет |
| 2) Начните решение вторым способом | Нужно произвести замену $\sqrt[4]{2х-1}=t$, *t* ≥ 0Выразим х: x = (*t*4 + 1)/2Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, получим уравнение 8-ой степени. |
| Сможем ли мы решить уравнение вторым способом? | Нет |
| 3) Решим уравнение третьим способом (графически) | Один ученик решает у доски. |

Решение:

1. Построим графики функций у = $x^{2}-x+2$ и у = $2\sqrt[4]{2x-1}$
2. Найдем точки пересечения графиков функций.

Графиком первой функции является парабола с вершиной в точке (x0, y0)

х0 = $-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2}=0,5$; y0 = y(x0) = 1,75

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 |
| у | 2 | 4 |

Дополнительные точки:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| х | 0,5 | 1 | 8,5 |
| у | 0 | 2 | 4 |

График второй функции – ветвь параболы, направленная вдоль оси Ох.

*у*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *х* |  |

х1 = 1, х2 = ?.

|  |
| --- |
| **Поиск решения** |
| *Деятельность учителя* | *Деятельность ученика* |
| Можем записать ответ?Почему? | Нет.Мы нашли точно только один корень |
| Вспомните цель нашего урока | Применять производную в нестандартных задачах |
| Для чего мы применяли производную раньше? | Для исследования функций |
| Какую функцию можно выделить в этой задаче? | Варианты ответов:- можно выделить две функции (левая и правая части уравнения);- можно перенести все в левую часть и получим одну функцию |
| Какую функцию рассмотрим? | $$f\left(x\right)=x^{2}-x+2-2\sqrt[4]{2x-1}$$ |
| Что сделаем потом? | Исследуем эту функцию на монотонность и экстремумы |
| Как поступим дальше? | Попробуем сделать вывод |

1. Рассмотрим функцию $f\left(x\right)=x^{2}-x+2-2\sqrt[4]{2x-1}$, D(f) = [0,5; +∞)
2. $f^{'}\left(x\right)=2x-1-2\frac{2}{4\*\sqrt[4]{(2x-1)^{3}}}=2x-1-\frac{1}{\sqrt[4]{(2x-1)^{3}}}=\frac{\sqrt[4]{(2x-1)^{7}}-1}{\sqrt[4]{(2x-1)^{3}}}$

*+*

*–*

*f(х)*

*f’(х)*

1

0,5

*х*

*f’*(*x*)=0 при *х* = 1

*x* = 1 – точка минимума

*f*min= *f*(1) = 2 – 2 = 0

1. Так как функция убывает на отрезке [0,5; 1], то во всех точках промежутка [0,5; 1) значения функции > 0;

так как функция возрастает на промежутке [1; +∞], то во всех точках промежутка (1; +∞) значения функции > 0;

Значит, уравнение имеет единственный корень *х* = 1

Ответ: *х* = 1.

3) Задача №3. Решите неравенство 2*х*9 – *х*5 + *х* – 2 < 0

|  |
| --- |
| **Анализ условия задачи и поиск решения** |
| *Деятельность учителя* | *Деятельность ученика* |
| Применим производную и при решении неравенства.С чего начинаем решение задачи методом применения производной? | С рассмотрения функции |
| Какую функцию рассмотрим в данной задаче? | Рассмотрим функцию*f*(*x*) = 2*х*9 – *х*5 + *х* – 2 |
| Какой следующий шаг? | Исследуем функцию на монотонность и экстремумы и сделаем вывод |

Решение:

1. Рассмотрим функцию *f*(*x*) = 2*х*9 – *х*5 + *х* – 2, D(*f*) = R
2. *f’*(*x*) = 18*x*8 – 5*x*4 + 1

*f’*(*x*)=0, 18*x*8 – 5*x*4 + 1 = 0, D = 25 – 72 = – 47<0 =>корней нет

18*x*8 – 5*x*4 + 1>0 на R

Так как *f’*(*x*)>0, то функция *f*(*x*) возрастает на R.

1. Подбором находим *f*(*x*)=0 при *х =* 1.

Так как функция возрастает на всей области определения, то ее график пересекает ось Ох лишь в одной точке (в точке *х =* 1). Правее этой точки график лежит ниже оси Ох.

Таким образом, решением неравенства 2*х*9 – *х*5 + *х* – 2 < 0 являются *х* $\in $(–∞; 1)

4) Задача №4. Сравните числа $e^{π}$ и $π^{e}$.

|  |
| --- |
| **Анализ условия задачи и поиск решения** |
| *Деятельность учителя* | *Деятельность ученика* |
| К какому виду чисел относятся данные числа? | Эти числа иррациональные |
| Можно ли вычислить приближенно значения данных чисел? | Нет, так как здесь иррациональное число нужно возвести в иррациональную степень |
| Что общего у этих чисел?Чем они отличаются? | Оба числа имеют вид *ab* и состоят из *e* и π. В них меняются местами показатель и основание степени. |
| Как мы можем избавиться от степеней? | Прологарифмировав оба числа по одному основанию |
| Прологарифмируем числа по основанию *е*.Какие получатся числа? | $π\*lne$ и $e\*lnπ$ |
| Изменится ли при этом знак между числами? Почему? | Нет. Так как мы логарифмируем по основанию *е* > 1 |
| Можно ли еще изменить эти числа так, чтобы одно числовое выражение содержало только *е*, а другое – только π.  | Разделим оба числа на *е* \* π |
| Изменится ли при этом знак между числами? Почему? | Нет. Так как мы делим на положительное число *е* \* π > 0 |
| Какие числа мы получим? | Получим числа $\frac{lne}{e}$ и $\frac{lnπ}{π}$ |
| Отличается ли знак между этими числами и исходными? | Нет |
| Что общего у этих чисел?Чем они отличаются? | Оба имеют вид $\frac{lnx}{x}$. Одно выражение содержит вместо *х е,* другое – *π*  |
| Можно сравнить числа с помощью производной.С чего начинаем применение производной? | С рассмотрения функции |
| Какую функцию можно рассмотреть в данной задаче? | *f*(*x*) = $\frac{lnx}{x}$ |
| Как можно изменить требование задачи, используя данную функцию? | Сравнить *f*(*e*) и *f*(*π*) |
| Как можно сравнить значения функции, если мы не можем вычислить их | Определить возрастает или убывает функция на промежутке, содержащем *е* и *π* |
| Как определить характер монотонности функции? | Исследовать ее с помощью производной |

Решение:

1. Преобразуем числа

$e^{π}$ $π^{e}$

$lne^{π}$ $lnπ^{e}$

$πlne$ $elnπ$

$\frac{lne}{e}$ $\frac{lnπ}{π}$

1. Рассмотрим функцию *f*(*x*) = $\frac{lnx}{x}$ , D (f) = (0; +∞)
2. *f’*(*x*) = $\frac{\frac{1}{x}\*x-lnx\*1}{x^{2}}=\frac{1-lnx}{x^{2}}$

0

*е*

*х*

+

–

*f’*(*x*) = 0 при *х* = *е*

Функция возрастает (0; *е*], убывает [*e*; +∞)

1. Числа *е* и *π* принадлежат промежутку [*e*; +∞), на котором функция убывает, значит, из *е* < *π* следует *f*(*е*) > *f*(*π*)

Таким образом $\frac{lne}{e}$ > $\frac{lnπ}{π}$ и $e^{π}$ > $π^{e}$

5) Самостоятельная работа:

|  |  |
| --- | --- |
| 1 уровень. | 2 уровень. |
| 1. Докажите основное тригонометрическое тождество, используя производную.

(sin2x + cos2x = 1)1. Решите неравенство *х*3 + 4*х* – 5 > 0
 | 1. Докажите тождество

$$sin^{4}x+\frac{1}{2}cos2x-\frac{1}{8}cos4x=\frac{3}{8}$$1. Найдите область определения функции *у* = $\sqrt{1-lnx-x}$
 |

***III. Рефлексивно-оценочная часть***

1. **Учитель задает вопросы**

Какой была цель нашего урока? (научиться применять производную при решении нестандартных задач)

Достигли ли мы цели?

В каких видах задач мы нашли применение производной?

Какая задача вам больше всего понравилась?

Какая задача оказалась самой трудной?

1. **Ответьте на вопросы:**

- Расскажите, как можно доказать тождество, используя производную.

- Какой порядок действий при применении производной для решения уравнений и неравенств, и для сравнения чисел? (Рассмотреть функцию, исследовать ее на монотонность и экстремумы, сделать вывод)

**3. Выставление отметок.**

**4. Домашнее задание.** № 914, 917, 930, 932 (решить три любых задачи), Поиск задач в дополнительных источниках (Задачи затем заносятся на компьютер учителя в папку «Нестандартное применение производной»)